Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
M.Sc. Thor Wittich

Wintersemester 2021/22
15.11.2021

Lineare Algebra I
Blatt 5

---

1 | Zykelzerlegung

Zerlegen Sie folgende Permutationen in Zykel und berechnen Sie jeweils das Signum! Geben Sie außerdem die inversen Permutationen α^{-1}, β^{-1} und γ^{-1} an!

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 3 & 4 & 5 & 6 & 9 & 8 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \beta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 11 & 3 & 1 & 2 & 10 & 9 & 5 & 7 & 8 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\gamma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

2 | Kleingruppen

Die **Verknüpfungstabelle** einer Gruppe $(G, *)$ hat eine Zeile für jedes Element $x \in G$ und eine Spalte für jedes Element $y \in G$. Sei weist in Zeile x und Spalte y den Wert von $x * y$ aus.

(a) Wie sehen die Verknüpfungstabellen von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ aus (siehe Blatt 4, Aufgabe 2)?
(b) Jede Gruppe mit zwei Elementen ist isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
(c) Jede Gruppe mit drei Elementen ist isomorph zu $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
(d) Ist die Gruppe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

Tipp für (b–d): Zeigen Sie zunächst, dass für jedes Element y einer Gruppe $(G, *)$ die durch $x \mapsto x * y$ und $x \mapsto y * x$ definierten Abbildungen $G \to G$ Bijektionen sind. Dann folgt, dass in der Verknüpfungstabelle in jeder Zeile jedes Element von G genau einmal auftritt, und dass auch in jeder Spalte jedes Element von G genau einmal auftritt.

3 | Gaußsche Zahlen ★

Die Teilmenge $\mathbb{Z}[\mathbf{i}] = \{a + \mathbf{i}b \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ist ein Unterring von $\mathbb{C}$: die Addition und die Multiplikation in $\mathbb{C}$ lassen sich auf $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ einschränken, und ausgestattet mit diesen Verknüpfungen ist $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ ein Ring.

Eine Zahl $z \in \mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ ist genau dann in $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ eine Einheit, also invertierbar bezüglich der Multiplikation, wenn $\|z\| = 1$ ist. Wie viele Einheiten gibt es in $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$? Zu welcher aus der Vorlesung bekannten Gruppe ist die Einheitengruppe $(\mathbb{Z}[\mathbf{i}])^\times$ isomorph?

— Aufgabe 4 auf der nächsten Seite —

4 | Millimeterarbeit ★

Zu je zwei teilerfremden Zahlen $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ existieren Koeffizienten $x, y \in \mathbb{Z}$, für die gilt:

$$xm + yn = 1$$

Bitte merken Sie sich diese Aussage, selbst wenn Sie die Aufgabe nicht bearbeiten. Sie wird Ihnen noch nützlich sein.

Beweisen Sie die Aussage wie folgt:

Schritt 1: Es gibt eine Abbildung $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(nm)\mathbb{Z}$, die $([x], [y])$ auf $[xm + yn]$ abbildet.
Schritt 2: Diese Abbildung ist ein Gruppenhomomorphismus.
Schritt 3: Sie ist für teilerfremde m, n injektiv.
Schritt 4: Sie definiert für teilerfremde m, n sogar einen Gruppen*iso*morphismus.

Wieso folgt nun die Behauptung? Wie können die Koeffizienten x und y zum Beispiel für $n = 13$ und $m = 17$ gewählt werden?